



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA FUNCIONES I

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-I



Contenido

- **RELACIONES**
- **DEFINICIÓN DE FUNCIÓN**
- **DOMINIO y RANGO de una FUNCIÓN**
- **FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL**
- **GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN**
- **PROPIEDADES**
- **FUNCIONES ELEMENTALES**

RELACIONES BINARIAS

Definición: Dados dos conjuntos A y B no vacíos, decimos que R es una **relación binaria** en $A \times B$, si R es un subconjunto no vacío cualquiera de $A \times B$, es decir:

R es una relación en $A \times B$ si, y solamente si $R \subset A \times B$

Ejemplo:

Sean $A = \{7; 8; 9\}$; $B = \{C, S\}$

Tenemos que $A \times B = \{(7, C); (7, S); (8, C); (8, S); (9, C); (9, S)\}$.

Un ejemplo de relación en $A \times B$ es

$$R_1 = \{(8, C); (8, S); (9, C)\}$$

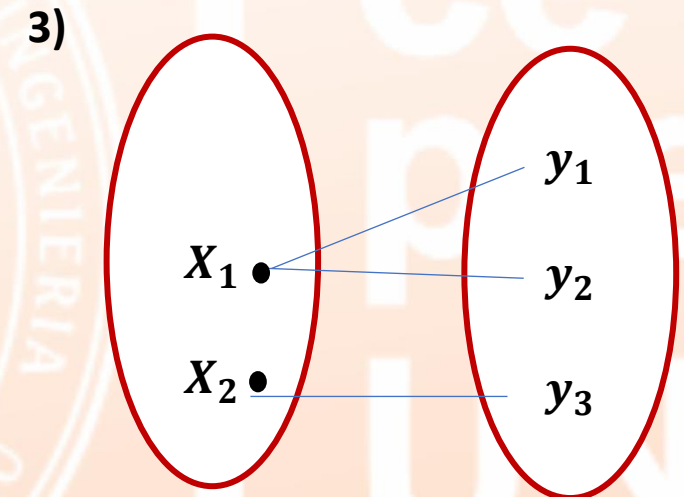
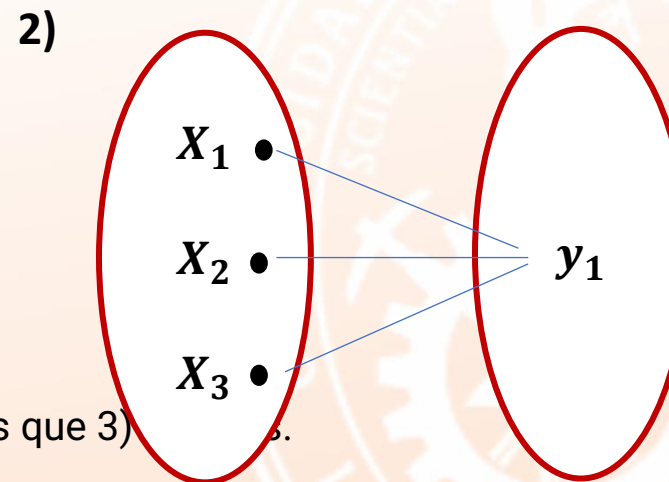
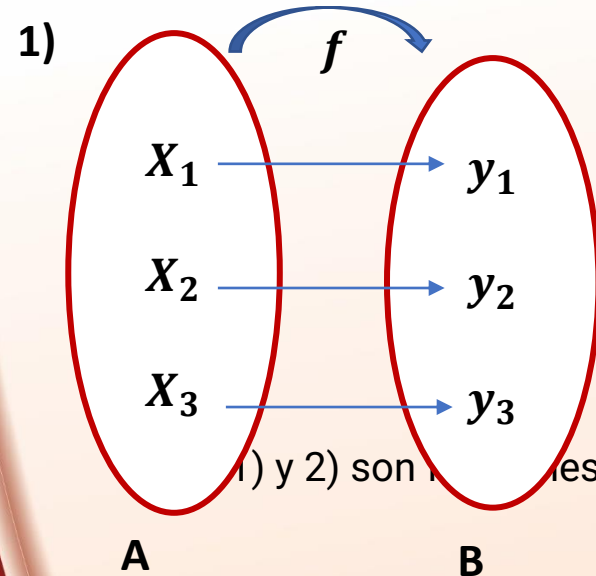
FUNCIONES

Definición: Una relación f en $A \times B$, con $f \neq \emptyset$, es una **función** si se cumple lo siguiente:

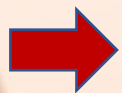
$$\forall (x, y) \in f, \forall (z, w) \in f, [x = z \rightarrow y = w]$$

Esto es, si $(x, y) \in f$ y $(x, w) \in f$ entonces $y = w$.

$f \subset A \times B$ **no es función** si, y solo si $\exists (x, y) \in f, \exists (z, w) \in f, [x = z \wedge y \neq w]$



1) y 2) son funciones. Mientras que 3) no es.



Ejercicio 211: Determinar el valor de ab , para que el siguiente conjunto de pares ordenados sea una función

$$g = \{(9; 10), (9; x + 6), (x; a + b), (x; 18), (x - 1; 3a - 4b), (|x - 1|; 5)\}$$

Resolución:

Dado que $(9; 10) \in f \wedge (9; x + 6) \in f$, entonces $10 = x + 6$, esto es $x = 4$

También $(x; a + b) \in f \wedge (x; 18) \in f$ entonces $a + b = 18$

Asimismo $(x - 1; 3a - 4b) \in f \wedge (|x - 1|; 5) \in f$ entonces $3a - 4b = 5$

Así, $a = 11$, $b = 7$. Por tanto $ab = 77$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN.

Definición: Dada una función f en $A \times B$, el dominio de f es:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in A / (x, y) \in f\}$$

Esto es, $\text{Dom}(f)$ es el conjunto formado por todas las primeras componentes, abscisas, de los pares ordenados $(x, y) \in f$.

RANGO DE UNA FUNCIÓN.

Definición: Dada una relación f en $A \times B$, el rango de f es:

$$\text{Ran}(f) = \{y \in B / (x, y) \in f\}$$

Esto es, $\text{Ran}(f)$ es el conjunto formado por todas las segundas componentes, ordenadas, de los pares ordenados $(x, y) \in f$.

Observaciones:

1) Cuando $(a, b) \in f$ decimos que b es la imagen de a , y que a es una preimagen de b , lo que denotamos por $b = f(a)$

2) Sea f una función en $A \times B$. Decimos que f es una función de A en B cuando $A = \text{Dom}(f)$. En este caso escribiremos $f: A \rightarrow B$.

3) El rango de una función $f: A \rightarrow B$ no necesariamente es B

$$\text{Ran}(f) = \{y \in B / (x, y) \in f\} \subset B$$

B es llamado **conjunto de llegada**.

4) En la regla de correspondencia $y = f(x)$

- x es la **variable independiente**,
- y es la **variable dependiente**.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una función $f: A \rightarrow B$ con conjunto de llegada $B \subset \mathbb{R}$, y cuyo dominio es $A \subset \mathbb{R}$, es llamada una **función real de variable real**.

Ejercicio: Sea la función $f: [-6; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = -x^2 + 6x + 7$$

Determine el rango de f .

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 6x + 7 \\ f(x) &= -(x^2 - 6x) + 7 \\ f(x) &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) + 7 \\ f(x) &= -(x - 3)^2 + 16 \end{aligned}$$

Así, si $-6 \leq x \leq 5$ entonces $-9 \leq x - 3 \leq 2$. Así, $0 \leq (x - 3)^2 \leq 81$,
 Por ende, $-81 \leq -(x - 3)^2 \leq 0$. Así, $-65 \leq 16 - (x - 3)^2 \leq 16$.
 Por lo tanto, $Ran(f) = [-65; 16]$.

Ejercicio . Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función , cuya regla de correspondencia es $f(x) = |x - 8| + |x + 5|$. Si $Ran(f) = [d; +\infty)$, entonces d es:

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Resolución:

$$\text{Tenemos que } f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \geq 8 \\ 13, & \text{si } -5 \leq x < 8, \\ -2x + 3, & \text{si } x < -5 \end{cases}$$

Si $x < -5$, entonces $f(x) = -2x + 3 > 13$.

Si $-5 \leq x < 8$, entonces $f(x) = 13 \geq 13$.

Si $x \geq 8$, entonces $f(x) = 2x - 2 \geq 13$.

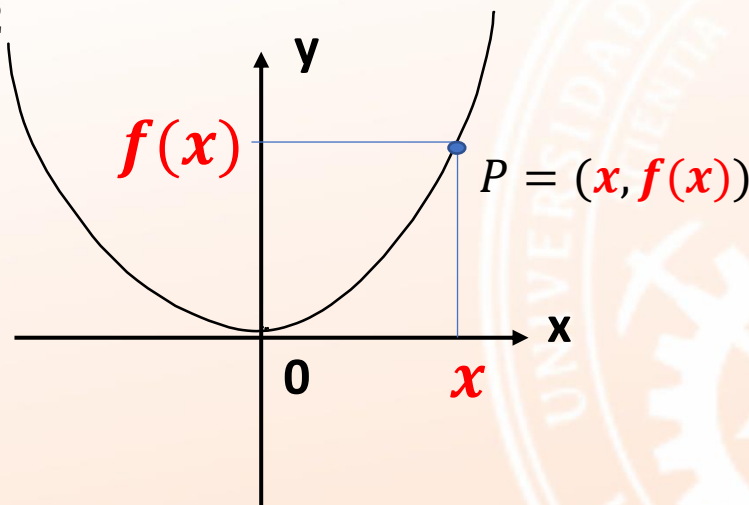
Por ende, $Ran(f) = [13, +\infty)$. Así $d = 13$.

La gráfica de una función

Si $f: A \rightarrow B$ es una función real de variable real, con regla de correspondencia $y = f(x)$, podemos representarla en el plano cartesiano. La **gráfica de f** es la representación geométrica en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, de los pares ordenados que pertenecen a f , es decir:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$$

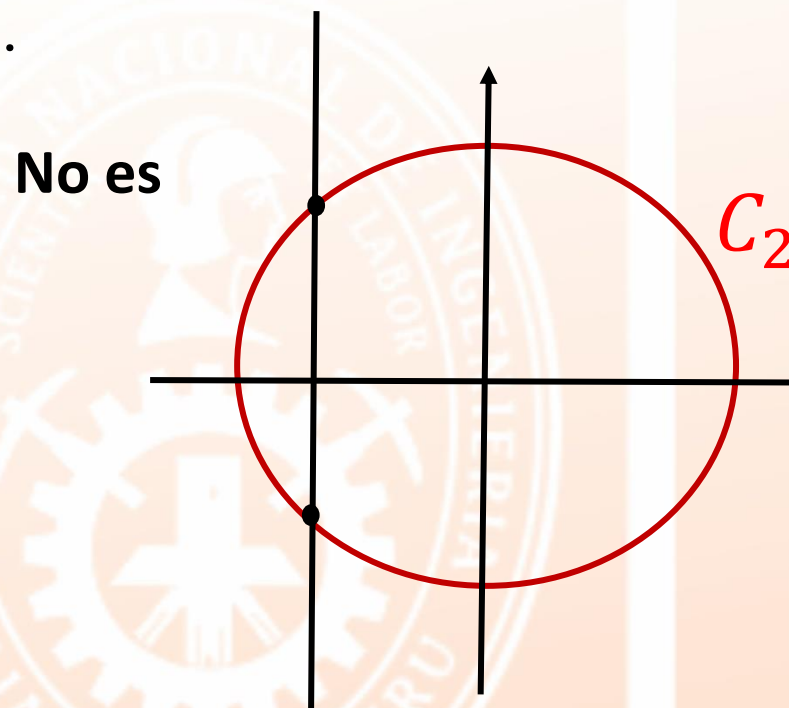
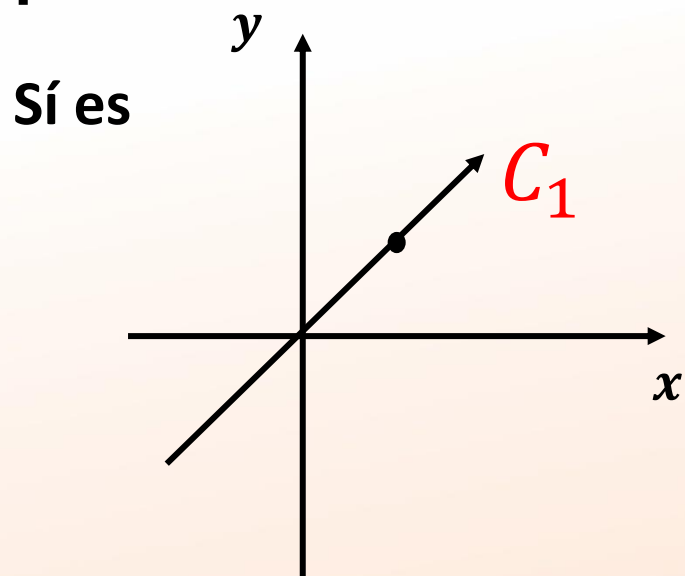
Ejemplo: $y = x^2$



Propiedad geométrica de la gráfica

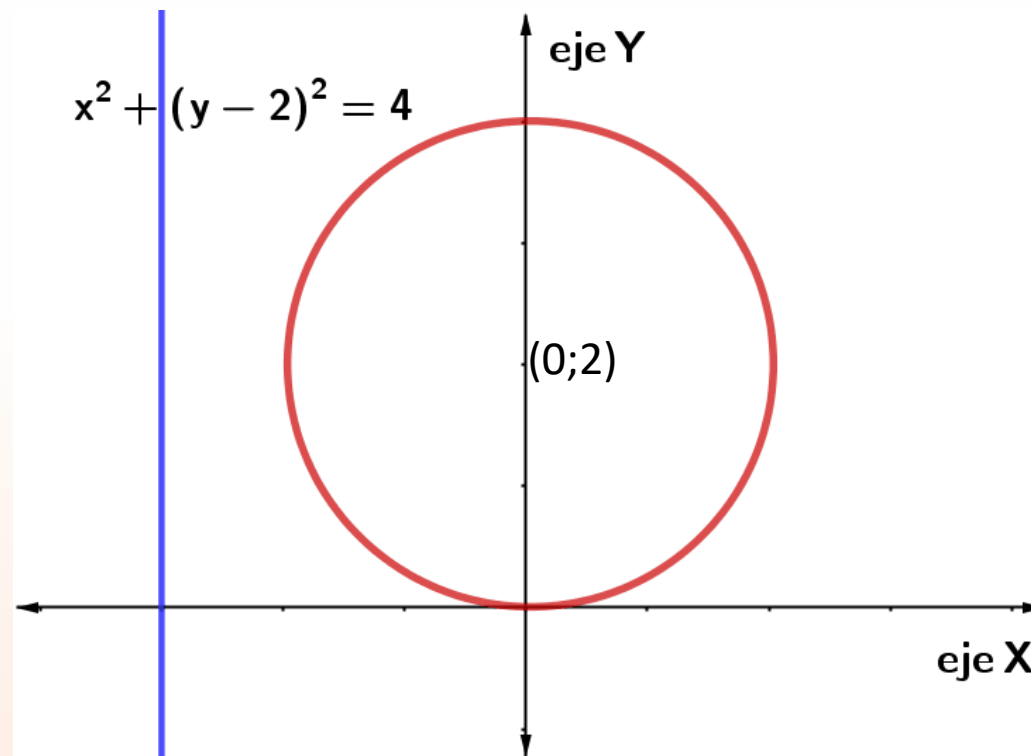
Sea C una curva en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

- C es la gráfica de una función si, y solo si, **toda recta vertical corta a C a lo más en un punto.**
- C no es la gráfica de una función si, y solo si, **existe alguna recta vertical que corta a C en más de en un punto.**



Ejemplo: Consideremos $A = [-2, 2]$ y $B = \mathbb{R}$, y el conjunto de pares ordenados

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2] \wedge x^2 + (y - 2)^2 = 4\}$$



Existe al menos una recta vertical que corta a la curva en más de un punto



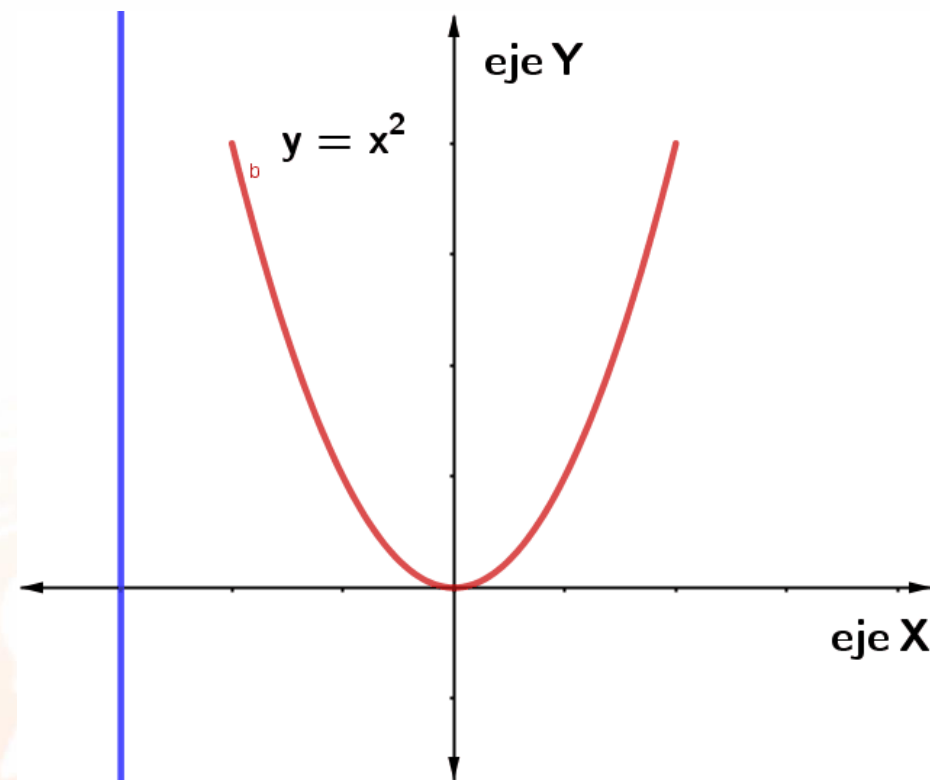
f no es una función

Ejemplo:

Consideremos $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ y el conjunto de pares ordenados

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

Este conjunto de pares ordenados representa un lugar geométrico en el plano cartesiano:



Toda recta vertical corta al lugar geométrico en un punto a lo más



f es una función

Ejercicio 213:

Determine cuáles de los siguientes conjuntos son funciones:

I. $f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| + |y| = 3\}$

II. $g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$

III. $h = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - y = 1\}$

IV. $k = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

A) Solo f B) Solo g
Solo k E) Solo h y k

C) Solo h D)

Solamente k representa a una función ya que es posible despejar y en términos de x de manera única.

Funciones Elementales

☐ Función afín

❖ Función lineal

➤ Función identidad

❖ Función constante

☐ Función valor absoluto

☐ Función raíz cuadrada

☐ Función cuadrática

☐ Función signo

☐ Función cúbica

☐ Función recíproca

☐ Función máximo entero

- **En lo que sigue, todas las funciones consideradas serán consideradas sobre su máximo dominio.**

Función Afín

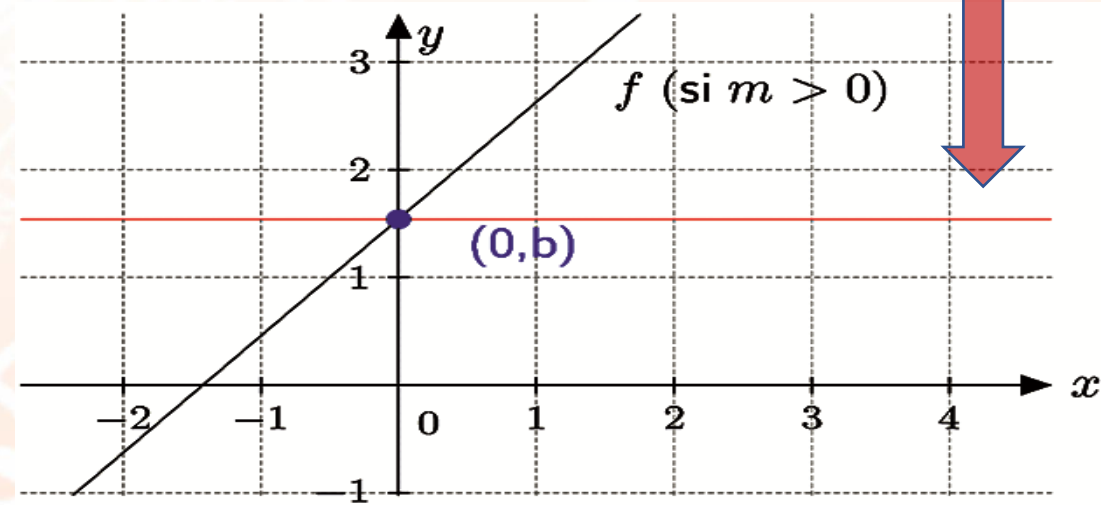
Definición:

Decimos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función afín** si existen constantes $m \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que la regla de correspondencia de f es:

$$f(x) = mx + b$$

m es **pendiente** de la recta que es la gráfica de f

En particular, cuando $m = 0$ se tiene una **función constante** cuya gráfica es una recta horizontal

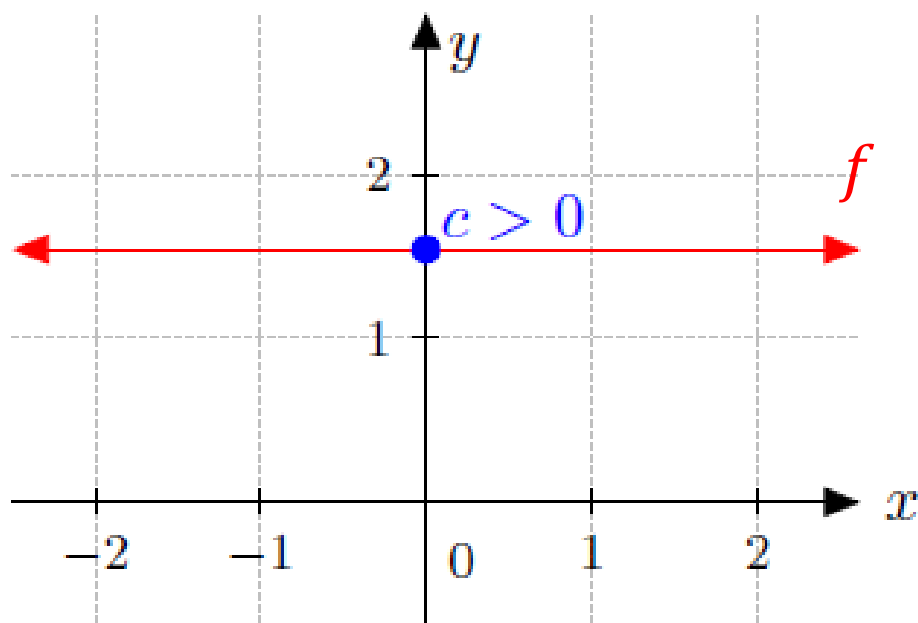


$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \mathbb{R} \\ \text{Ran}(f) &= \begin{cases} \mathbb{R} & ; \text{ si } m \neq 0 \\ \{b\} & ; \text{ si } m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Función Constante

Es un caso particular de una función afín.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función constante** si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = \{c\}$$

Función lineal

Es un caso particular de la función afín. Decimos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función lineal** si tiene la siguiente regla de correspondencia

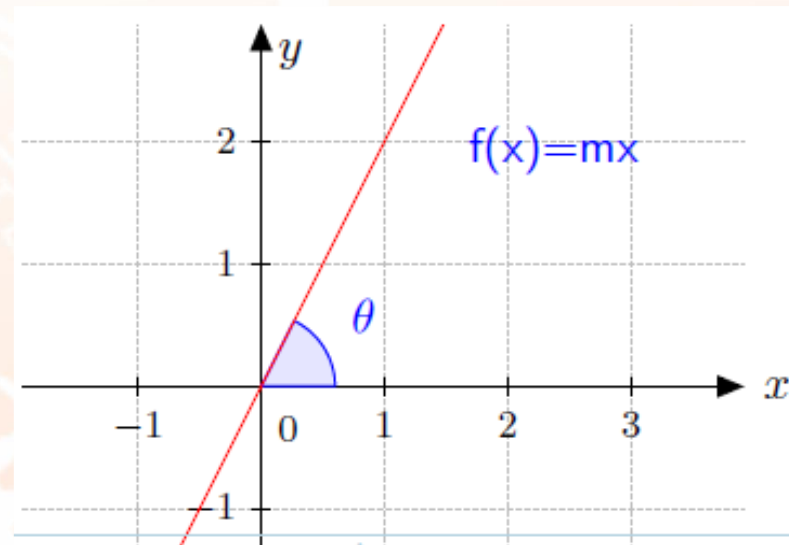
$$f(x) = \mathbf{m}x,$$

para alguna constante $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; \text{ si } \mathbf{m} \neq 0 \\ \{0\} & ; \text{ si } \mathbf{m} = 0 \end{cases}$$

En la figura se aprecia la grafica de una función lineal de pendiente $\mathbf{m} > 0$



Propiedad de una función lineal

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una **función lineal** entonces se cumple que:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Observación 1: De la última propiedad, considerando $x = 1$ y $f(1) = m$, se tiene que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = m \cdot \lambda$

Observación 2: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

f es lineal si, y solo si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$,

Función Identidad

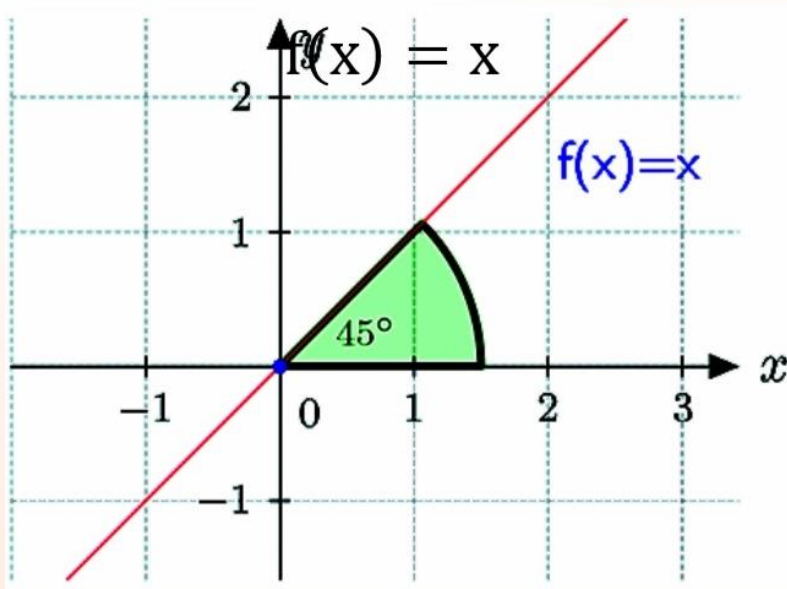
Es un caso particular de la función lineal.

La **función identidad** es aquella función lineal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica tiene pendiente $m = 1$, esto es:

$$f(x) = x$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$$



Una notación habitual para la función Identidad sobre $A \subset \mathbb{R}$ es $I_A: A \rightarrow A$ definida por

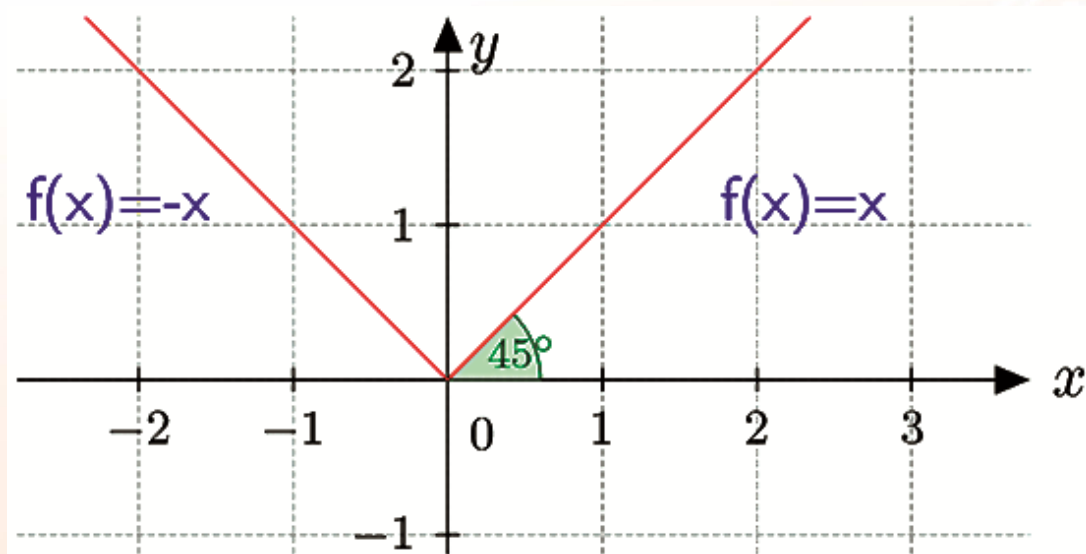
$$I_A(x) = x$$

para todo $x \in A$

Función valor absoluto

La función valor absoluto es aquella función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \text{ si } x > 0 \\ 0 & ; \text{ si } x = 0 \\ -x & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



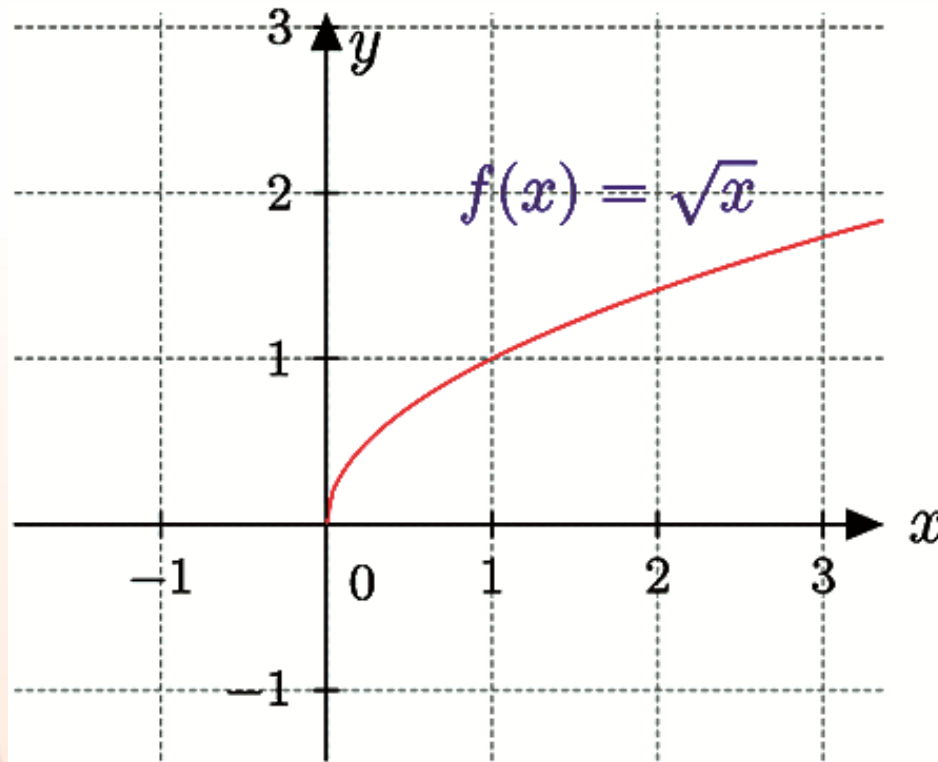
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

Función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada es aquella función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$$

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

Función cuadrática

Es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuya regla es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

Completando cuadrados tenemos que:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

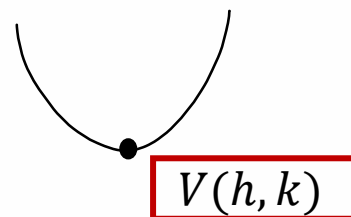
$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Donde $\Delta = b^2 - 4ac$. Así

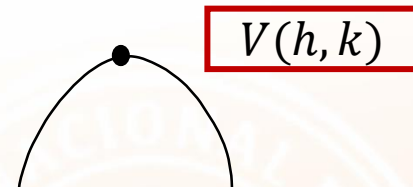
$$0 \leq \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{y + \frac{\Delta}{4a}}{a}$$

Función cuadrática

i) si $a > 0$ entonces la gráfica de f es:



ii) si $a < 0$ entonces la gráfica de f es:



En ambas gráficas el vértice de la gráfica de f es

$$V = (h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

- Si $a < 0$ entonces $Ran(f) = \langle -\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$
- Si $a > 0$ entonces $Ran(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \rangle$

Función Cúbica

Una **función cúbica** es aquella función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son constantes reales, con $a \neq 0$.

Observación: En este caso se tiene que $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$

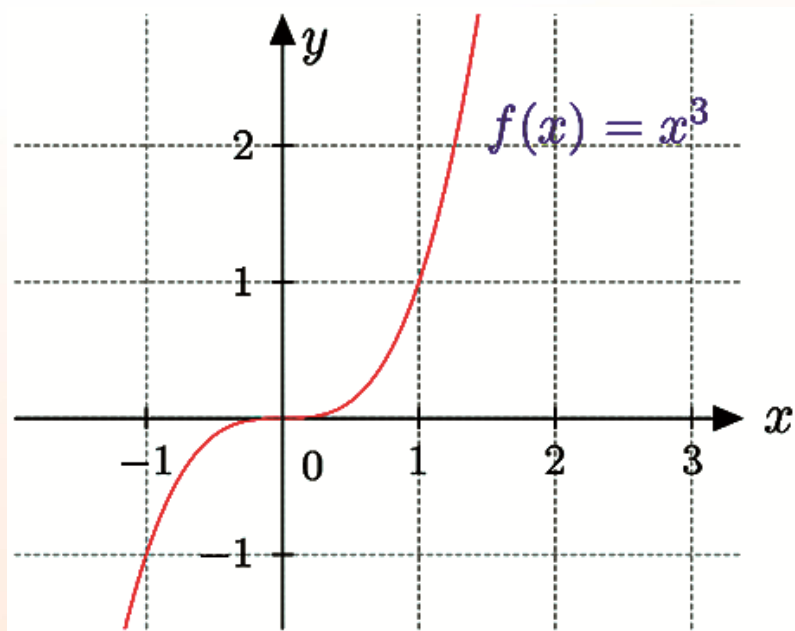
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Función Cúbica

Caso más simple posible: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3$$

Este caso corresponde a $a = 1$ y $b = c = d = 0$.

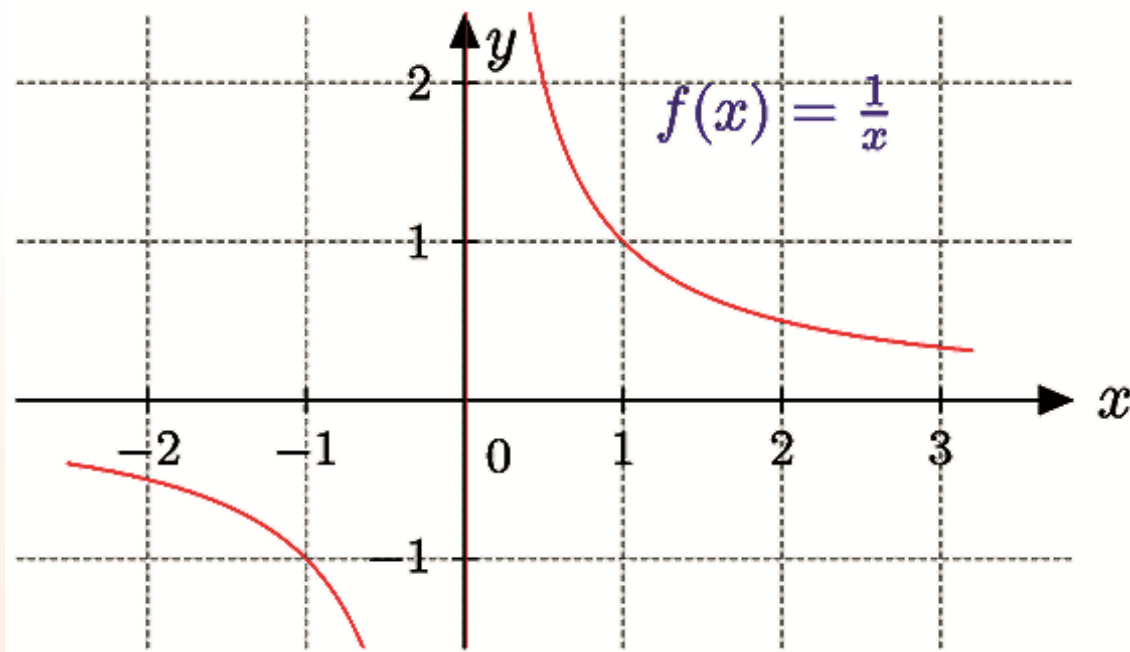


$$\text{Dom}(f) = \text{Ran}(f) = \mathbb{R}$$

Función recíproca

La **función recíproca** es aquella función $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



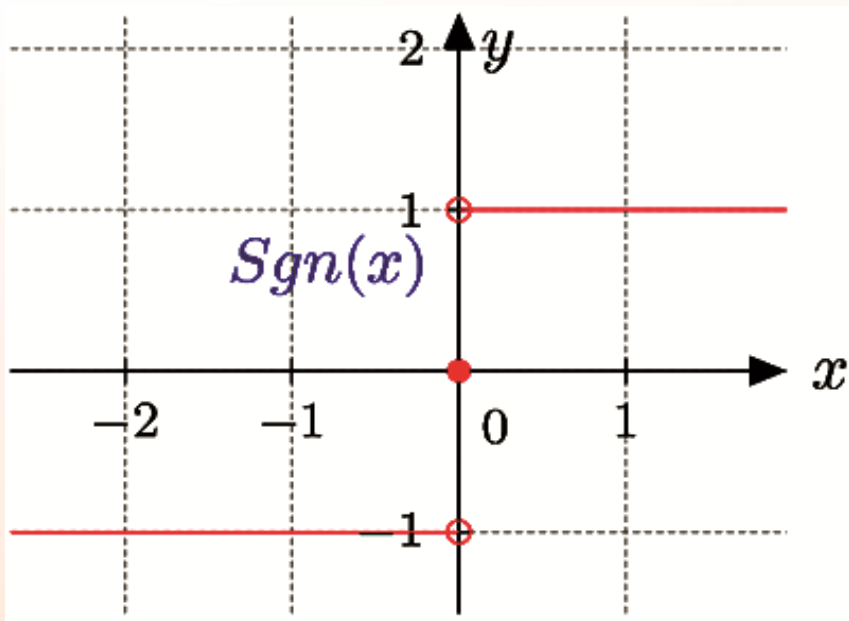
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Función signo

La **función signo** es aquella función $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$



$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = \{-1, 0, 1\}$$

La Función Máximo Entero

Es aquella función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

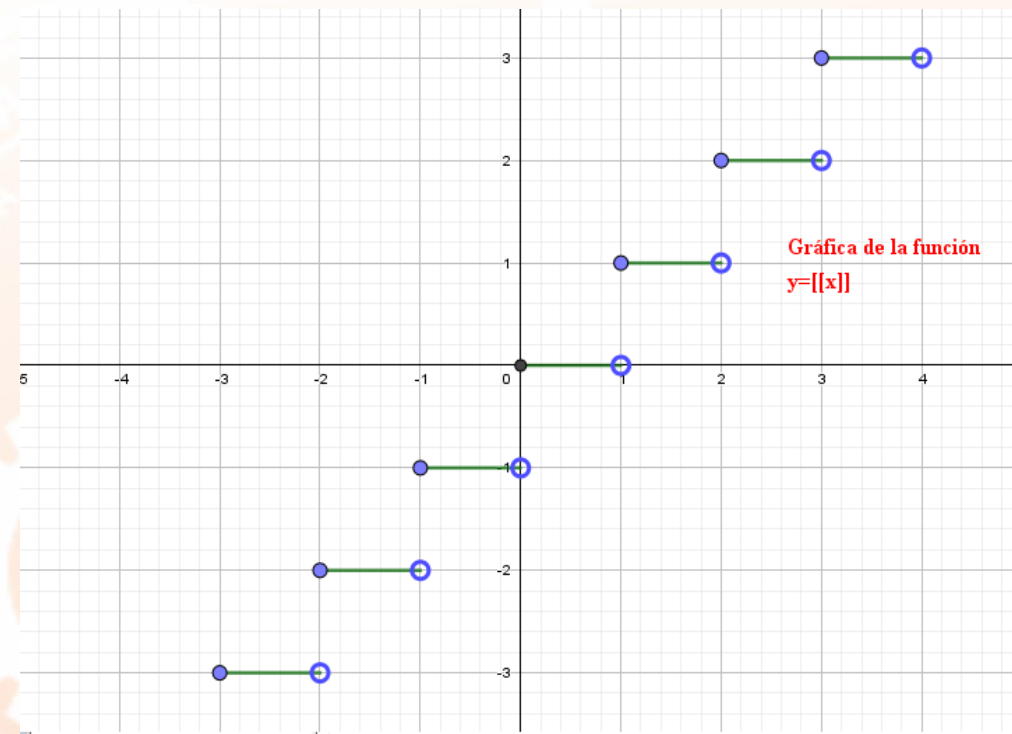
$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Observación: $\llbracket x \rrbracket$ es, de entre todos los números enteros menores o iguales que x , el mayor. Esto es, para $n \in \mathbb{Z}$,

$x \in [n, n + 1)$ si, y solo si $\llbracket x \rrbracket = n$

➤ $Dom(f) = \mathbb{R}$

➤ $Ran(f) = \mathbb{Z}$



Propiedades:

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}: \lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$3. \forall n \in \mathbb{Z}: \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

$$4. \forall x, y \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$$

$$5. \forall x, y \in \mathbb{R}: x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

$$6. \forall n \in \mathbb{Z}: \langle -\infty, n + 1 \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor \leq n\}$$

$$8. \forall n \in \mathbb{Z}: [n + 1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor > n\}$$

$$7. \forall n \in \mathbb{Z}: \langle -\infty, n \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor < n\}$$

$$9. \forall n \in \mathbb{Z}: [n, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor \geq n\}$$

$$\triangleright \forall x \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$\triangleright \lfloor x \rfloor = x \quad \text{si, y solo si} \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Z} \\ -1; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

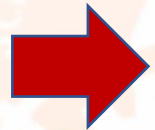
Ejercicio 219

Grafique la función f , cuya regla de correspondencia es :

$$f(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 3x - 4} \right)$$

Resolución: Como $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{(x+3)(x-7)}{(x-4)(x+1)} \right)$

Así, $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$

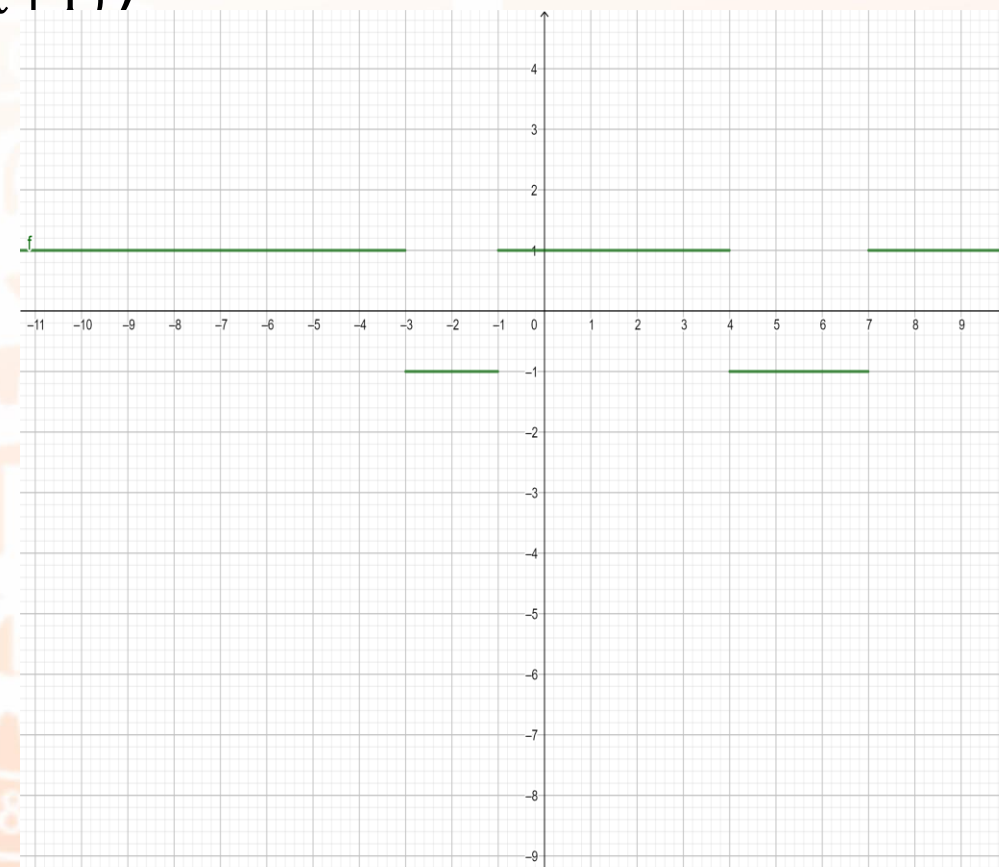
- $\frac{(x+3)(x-7)}{(x-4)(x+1)} = 0$ si, y solo si $x \in \{-3; 7\}$
- $\frac{(x+3)(x-7)}{(x-4)(x+1)} > 0$ si, y solo si $x \in A$, 

donde $A = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle \cup \langle 7; +\infty \rangle$

$$\frac{(x+3)(x-7)}{(x-4)(x+1)} < 0$$

si, y solo si $x \in B$,

donde $B = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 4; 7 \rangle$



Ejercicio 223:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left\lfloor \frac{9x}{x^2+x+4} \right\rfloor$

Determine la suma de elementos de $Ran(f)$

- A) -8 B) -7 C) -6 D) -5 E) -4

Resolución: Tenemos $f(0) = 0$ y para $x \neq 0$, tenemos $f(x) = \left\lfloor \frac{9}{x+\frac{4}{x}+1} \right\rfloor$

□ Si $x > 0$, entonces $x + \frac{4}{x} + 1 \geq 5$. Así, $0 < \frac{9}{x+\frac{4}{x}+1} \leq 9/5$. Por tanto,

$$f(x) = \left\lfloor \frac{9}{x+\frac{4}{x}+1} \right\rfloor \rightarrow Ran f = \{0; 1\}$$

□ Si $x < 0$, entonces $x + \frac{4}{x} + 1 \leq -3$. Así, $0 > \frac{9}{x+\frac{4}{x}+1} \geq -3$. Por tanto,

$$f(x) = \left\lfloor \frac{9}{x+\frac{4}{x}+1} \right\rfloor \quad Ran f = \{-3; -2; -1\}$$

Así, $Ran(f) = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Por lo tanto, la suma de elementos el $Ran(f)$ es -5 .